Карусель, карусель — это радость для всех…

Автор — И.С. Рубанов (г. Киров).

В статье о XXI Уральском турнире юных математиков (№12 за 2003 г.) было обещано подробнее рассказать о входившей в его программу "Математической карусели". Эта командная игра была придумана осенью 1997 года автором этой статьи совместно с Константином Кнопом и Сергеем Волченковым для I Кубка памяти А.Н. Колмогорова — математического турнира старшеклассников, возникшего на базе Уральских турниров. Игра оказалась веселой, азартной, и с того времени прочно вошла в программу Кубков и Уральских турниров. Но этим дело не ограничилось. Через год, руководя педпрактикой пятикурсников в одной из школ г. Кирова, я столкнулся с проблемой: студентам надо было провести массовое внеклассное мероприятие, а ученики 11 медицинского класса отнюдь не горели желанием в нем участвовать. Тогда я предложил студентам организовать "карусель" для семиклассников, а нескольких одиннадцатиклассников привлечь к ее проведению. А после игры старшеклассники неожиданно попросили провести карусель и у них! Позже выяснилось, что карусель, распространяясь после наших турниров и летних лагерей, хорошо прижилась и во многих других школах. Оказалось, что она нравится не только одаренным, но и обычным школьникам. Но информация о ней передавалась "из рук в руки", публикаций не было. Настало время исправить этот недостаток.

Правила

Математическая карусель — это командное соревнования по решению задач. Побеждает в нем команда, набравшая наибольшее число очков. Задачи решаются на двух рубежах — исходном и зачетном, но очки начисляются только за задачи, решенные на зачетном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на исходном рубеже, причем им присвоены номера от 1 до 6. По сигналу ведущего команды получают задачу и начинают ее решать. Если команда считает, что задача решена, ее представитель, имеющий номер 1, предъявляет решение судье. Если оно верное, игрок №1 переходит на зачетный рубеж и получает задачу там, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем члены команды, находящиеся на исходном и зачетном рубежах, решают разные задачи независимо друг от друга, общение между игроками, находящимися на разных рубежах, не разрешается.

Чтобы понять следующую часть правил, надо представить себе, что на каждом рубеже находящиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Перед началом игры на исходном рубеже они идут в ней в порядке номеров. Если члены команды, находящиеся на каком-либо из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, решение предъявляет судье игрок, стоящий в очереди первым. Если решение правильное, то с исходного рубежа этот игрок переходит на зачетный, а на зачетном возвращается на свое место в очереди. Если решение неправильное, то на исходном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди, а с зачетного переходит на исходный. Игрок, перешедший с одного рубежа на другой, становится в конец очереди, имеющейся на этом рубеже. И на исходном, и на зачетном рубежах команда может в любой момент отказаться от решения задачи. При этом задача считается нерешенной.

После того, как часть команды, находящаяся на каком-либо из двух рубежей, рассказала решение очередной задачи или отказалась решать ее дальше, она получает новую задачу. Если рубеж в этот момент покинул последний участник, задача начинает решаться тогда, когда там снова кто-нибудь появится.

За первую верно решенную на зачетном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачетном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следующую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдущую. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от цены нерешенной следующим образом. Если цена неверно решенной задачи была 6 баллов или больше, то следующая задача стоит 5 баллов. Если неверно решенная задача стоила 5 баллов, то следующая задача стоит 4 балла. Если же неверно решенная задача стоила 3 или 4 балла, то следующая задача стоит 3 балла.

Игра для команды оканчивается, если

а) кончилось время, или

б) кончились задачи на зачетном рубеже, или

в) кончились задачи на исходном рубеже, а на зачетном рубеже нет ни одного игрока.

Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд. Побеждает команда, набравшая больше баллов.

Проведение игры

Исходный и зачетный рубежи представляют собой два стола, снабженные стульями по числу членов команды. Желательно, чтобы расстояние между рубежами было не меньше метра, а между столами разных команд — не меньше 1,5-2 метров. Игру с 3-4 командами вполне можно провести в классной комнате, для большего числа команд потребуется зал, рекреация или широкий коридор.

Выдает командам задачи и следит за соблюдением правил находящийся вблизи судья (самая удобная позиция для него — между рубежами). Желательно, чтобы один судья обслуживал не больше двух команд. У судьи для каждой команды имеется по комплекту карточек с задачами для исходного и зачетного рубежей и протокол (рис. 1; число строк таблицы равно числу задач в наибольшем из двух комплектов), а также бумажка с верными ответами всех задач, снабженными в необходимых случаях комментариями по их зачету. Задачи каждого комплекта сложены в стопку по порядку номеров текстом вниз. Во избежание путаницы на обороте каждой карточки желательно написать название команды, номер задачи, исходная она или зачетная (например, "Орлы", 2, исх.). Выдавая команде очередную исходную или зачетную задачу, судья ставит *минус* в соответствующей графе против номера задачи. Если команда решает задачу верно, этот минус исправляется на плюс. Если верно решена зачетная задача, одновременно с плюсом в таблице проставляются число баллов, начисленное команде за эту задачу и текущая сумма баллов команды. Эти баллы можно проставить и по окончании игры, но тогда пропадет возможность сообщать командам по ходу игры текущий счет, что заметно добавляет ей азарта. Счет командам сообщает координатор (руководитель) игры, в обязанности которого входят также помощь судьям в сложных ситуациях и наблюдение за порядком. Координатор должен быть хорошо знаком с задачами. При малом числе команд он может одновременно быть судьей, но если команд много — это нежелательно.

Чем полезна карусель?

Как и любая коллективная игра, карусель воспитывает умение работать в команде. Но не только. Правила начисления баллов здесь поощряют длинные беспроигрышные серии: например, если команда верно решила зачетные задачи 1-7, она получает 3+4+5+6+7+8+9 = 42 очка, а если верно решила задачи 1-4 и 7-9, но в задачах 5 и 6 ошиблась — то только 3+4+5+6+4+5+6 = 33 (задача 6 после неверно решенной задачи 5 стоит 5 баллов, а задача 7 после неверно решенной задачи 6 — 4 балла), хотя в обоих случаях было верно решено по 7 задач. Поэтому из двух команд сравнимой математической силы победит та, где больше выдержки и лучше налажена проверка решений. Таким образом, карусель, как и математической бой, учит не только искать решения, но и тщательно проверять их. По ходу игры перед командой возникает немало нетривиальных тактических задач: в каком порядке расставить игроков на старте, куда поместить сильнейшего (если в начало — быстро попадет на зачетный рубеж, но вылетит назад при первой ошибке, если в конец — на зачетном рубеже довольно долго придется играть без него); "сбросить" ли задачу, которая долго не решается; сдавать ли правдоподобный, но не обоснованный строго ответ и т.п. Воспитывающееся при этом умение анализировать ситуацию и делать выводы — тоже не лишнее в жизни.

На математическом турнире, кружке или в Летней школе для одаренных детей карусель — это обычно развлечение или возможность снять напряжение после более серьезных занятий. Естественно, ту же роль она может играть и в школе, попутно привлекая новичков к более глубоким занятиям математикой. Но свойственный карусели спортивный азарт позволяет использовать ее здесь и в иных целях: например, "тематическая" карусель может мотивировать не слишком интересную процедуру решения ряда однотипных задач при закреплении какой-либо темы.

Команды, время игры, подбор задач

В правилах описана игра для команды из 6 человек. Это число можно изменять, но не стоит делать команды численностью меньше 3 или больше 7 человек, а также команды неравной численности. Для игры на школьном уроке можно рекомендовать команды из 3-4 человек. Командами в 1-3 человека можно играть в придуманную коллегой из Нижнего Новгорода Д.Ю. Кузнецовым "мини-карусель", где нет исходного рубежа, зачетные задачи решаются подряд всей командой, а баллы за них начисляются как в обычной карусели.

Время, отведенное на игру, количество исходных и зачетных задач оговариваются заранее. Продолжительность карусели может составлять от 20 минут до 2 и более часов и зависит от ее целей, количества и трудности задач и размеров команд. Зачетных задач должно быть не меньше удвоенного числа членов команды (скажем, для команд из 6 человек — не меньше 12): играть на слишком короткой дистанции неинтересно. Сверху количество зачетных задач ограничивается их трудностью и временем игры; во всяком случае, опыт показывает, что больше 25 задач давать не стоит. Исходных задач обычно бывает на 25-30% меньше, чем зачетных, но совсем неопытным командам можно давать их столько же, или даже больше, чем зачетных, иначе некоторые команды могут быстро оказаться "вне игры".

Исходные задачи должны быть достаточно простыми, чтобы при добросовестной работе хотя бы часть членов каждой команды могла быстро оказаться на зачетном рубеже. А вот среди зачетных простые и средние по трудности задачи должны порой "перебиваться" одной-двумя более трудными. Это делает игру интереснее, создавая интригу и расширяя тактические возможности команд. Понятно, что трудность задач определяется применительно к силе команд-участниц.

Чтобы карусель была динамичной, участники не должны тратить много времени на изложение решений. Судья оценивает только правильность ответа, требуя тех или иных обоснований лишь в редких, заранее оговоренных в имеющейся у него "шпаргалке" случаях. Поэтому задачи на доказательство или построение, где результатом является не ответ, а рассуждение, для карусели обычно не подходят — здесь царство задач на вычисление и нахождение.

Тематика задач зависит от цели игры. В "учебной" карусели на закрепление темы задачи, естественно, будут однотипными. В "игровой", напротив, разумно чередовать задачи на самые разные темы: текстовые, алгебраические, геометрические, комбинаторные, логические и т.д. В качестве примера приведем типичную "игровую" карусель, предлагавшуюся в феврале 2002 года на XIX Уральском турнире юных математиков командам семиклассников. Ее задачи подобраны Д.Ю. Кузнецовым при участии других членов Методической комиссии турнира. В непрофильной школе ее, после некоторой адаптации, можно использовать при работе с учащимися 8-10 классов.

Исходные задачи.

1. Старший брат идет от дома до школы 12 минут, а младший — 16 минут. Сколько минут потребуется старшему брату, чтобы догнать младшего, если тот вышел на одну минуту раньше?
2. Вася задумал целое число. Коля умножил его не то на 5, не то на 6. Женя прибавил к результату Коли не то 5, не то 6. Саша отнял от результата Жени не то 5, не то 6. В итоге получилось 73. Какое число задумал Вася (перечислите все возможные варианты)?
3. Какая цифра находится на 2002-м месте в ряду 12233344445…, где каждое натуральное число N записано в свою очередь N раз?
4. Сколько квадратов натуральных чисел среди чисел 1, 2, 3, 4, …, 2002?
5. Какое число надо вычесть из числителя дроби 1234/8747 и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получилась 1/8?
6. Какое двузначное число увеличивается в 4,5 раза, если его прочитать справа налево?
7. Между первым и третьим ударами часов проходит 4 секунды. В некоторый момент времени Гриша включает секундомер и начинает считать удары. Сколько он насчитает ударов, если последний удар прозвучал ровно через 17 секунд после включения секундомера?
8. Найдите все трёхзначные числа, из цифр каждого из которых можно составить шесть различных двузначных простых чисел.
9. Отцу – 41 год, старшему сыну – 13 лет, дочери – 10 лет, а младшему сыну – 6 лет. Через сколько лет возраст отца окажется равным сумме лет его детей?
10. В записи ***5 : 11 = ** замените звездочки цифрами так, чтобы получилось верное равенство.
11. На сколько процентов (и в какую сторону) изменится произведение двух положительных чисел, если первое число уменьшить на 20%, а второе — увеличить на 20%?

12. Два тупых угла расположены так, что две их стороны образуют развернутый угол, а две другие — прямой угол. Чему равна сумма этих тупых углов?
13. Укажите следующий после 2002 года «симметричный» (читаемый одинаково в обоих направлениях) год.
14. Изделие весит 200,2 *г*. Сколько тонн весит миллион таких изделий?

Зачётные задачи.

1. Натуральные *a*, *b*, *c* таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$. Найдите наибольшее значение этой суммы дробей.
2. Найдите углы прямоугольного треугольника, у которого один угол в 3 раза больше другого.
3. Иван Иванович купил собаку. Саша думает, что эта собака – черный пудель, Паша считает ее белой болонкой, а Маша – белым бультерьером. Известно, что каждый из ребят верно угадал либо породу, либо цвет шерсти собаки. Назовите породу собаки и цвет ее шерсти.
4. Про числа *a, b, c* и *d* известно, что *a = bcd*, *a+b = cd*, *a+b+c = d* и *a+b+c+d = 1*. Найдите эти числа.
5. Доску 8ґ8 без одной угловой клетки полностью разрезали на прямоугольники 1ґ4 и уголки из 3-х клеток. Сколько могло при этом получиться уголков? Перечислите все варианты.
6. Сколько решений имеет ребус (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры):

$$\begin{cases} 18 = К + А + З + А + Н + Ь \\ 19 = К + И + Р + О + В \end{cases}$$

?[1]

7. Незнайка, отремонтировав себе часы, обнаружил, что минутная стрелка идёт в другую сторону (а часовая – в правильную сторону). Через какое время после полудня на его «часах» стрелки встретятся в первый раз? Ответ дайте в часах.
8. Какую наибольшую длину может иметь замкнутая ломаная без самопересечений, идущая по линиям сетки клетчатого квадрата 8ґ8 (в том числе и по краю)?
9. Сколько существует девятизначных чисел, у которых все цифры различны и идут (слева направо) в порядке убывания?
10. В треугольнике *ABC* (*BC* = *a*, *CA* = *b*, *AB* = *c*) проведена медиана *CM*1, в треугольнике *BCM*1 — медиана *M*1*M*2, в треугольнике *CM*1*M*2 – медиана *M*2*M*3, в треугольнике *M*1*M*2*M*3 — медиана *M*3*M*4 и т.д. Чему равна длина отрезка *M*2001*M*2002?
11. Какой из знаков +, –, ґ, : надо поставить на месте «?», чтобы получилось наибольшее возможное значение выражения (плюсы и минусы перед скобками чередуются):

$$\frac{1}{102}+\left(\frac{2}{103}-\left(\frac{3}{104}+\left(\frac{4}{105}-\left(\frac{5}{106}+\ldots-\left(\frac{97}{198}+\frac{98}{199}?\frac{99}{200}\right)\ldots\right)\right)\right)\right)$$

?

12. Вася поставил на шахматную доску несколько не бьющих друг друга королей так, что нельзя больше добавить ни одного короля без нарушения этого правила. Сколько королей могло оказаться на доске? Укажите все варианты.
13. Из цифр 0, 1, 2, …, 9 составили два натуральных числа, использовав каждую цифру ровно один раз. Каково максимальное возможное значение их наибольшего общего делителя?
14. В математической карусели — 14 исходных и 20 зачётных задач. Сколько всего верно решенных задач в сумме могло оказаться по итогам карусели у команды из 6 человек? Укажите все возможности.
15. Решите в натуральных числах уравнение 2x + 3y + 5z = 235.
16. Разложите на простые множители число, равное 51ґ63ґ69+320.
17. Ряд 1234567891011121314… режется, начиная слева, подряд на минимально возможные куски так, что в каждом куске встречается каждая цифра. Как выглядит кусок, в который попало число 1000?
18. Крокодил Гена и Чебурашка зашли в фонтан. При этом Чебурашка на половину своего роста оказался в воде, а Гена – всего на 1/6 своего роста. Какова глубина фонтана, если Гена выше Чебурашки на 1 метр?
19. Сколько существует трёхзначных чисел, которые больше своей суммы цифр в 19 раз?
20. В автобусе ехали взрослые и дети, причем число взрослых относилось к числу детей как 2:3. После того, как четыре пассажира вышли (и никто не вошел), число взрослых стало относиться к числу детей как 3:4. Сколько пассажиров первоначально ехало в автобусе, если известно, что их было меньше 60 (перечислите все возможности)?

Решения исходных задач.

1. *Ответ:* 3. *Решение.* Весь путь до школы старший брат проходит на 4 минуты быстрее младшего. 1 минута вчетверо меньше, чем 4 минуты, поэтому старший брат "отыграет" её у младшего за 12:4 = 3 минуты.
2. *Ответ:* 12. *Решение.* Так как в конце Саша получил 73, то перед этим у Жени получилось не то 78, не то 79. Тогда у Коли получилось не то 72, не то 73, не то 74, причем его число должно было делиться на 5 или на 6. Среди них единственное такое число — 72. Значит, перед ходом Коли было 72:6=12.
3. *Ответ:* 4. *Решение.* Найдём максимальное двузначное *N*, после написания которого ещё не встретилась 2002-я цифра. Решая в натуральных числах неравенство 1+2+3+…+9+2(10+11+…+*N*) < 2002 Ы 45+(*N*+10)(*N*–9) < 2002, получим, что *N* ≤ 44. При этом после написания числа 44 будут использованы 1935 цифр и нам нужна 67-я цифра в записи 454545…(45 раз по две цифры), которая равна 4.
4. *Ответ:* 44. *Решение.* 442 < 2002 < 452, следовательно, в этом списке есть 12, 22, 32, …, 442.
5. *Ответ:* 125. *Решение.* Составим уравнение (1234–*x*)/(8747+*x*) = 1/8. Из него *x* =125.
6. *Ответ:* 18. *Решение.* Составим уравнение для двузначного числа *ab*. Получим, что 4,5(10*a*+*b*) = 10*b*+*a*. После упрощения получаем 8*a* = *b*. Следовательно, *a=1*, *b=8*, а искомое число равно 18.

[1] В Казани и Кирове проходили, соответственно, 18 и 19 Уральские турниры.

7. *Ответ:* 9. *Решение.* Назовем "промежутком" период времени между двумя последовательными ударами часов. Между первым и третьим ударами – два промежутка. Поэтому один промежуток равен 2 секундам. Отсчитывая по 2 сек. назад, получим, что удары часов звучали через 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3 и 1 секунду после включения секундомера. Значит, их было девять.
8. *Ответ:* 137, 173, 317, 371, 713, 731. *Решение.* Всего из трёхзначного числа можно составить шесть двузначных чисел, а так как все они различны и простые, то цифры трёхзначного числа должны быть различными, нечётными и отличными от 5. Т.е. они могут принимать значения 1, 3, 7, 9. Но 9, 3 (93 — составное) и 9, 1 (91 — составное) одновременно быть не могут, следовательно, в числе нет 9. Тогда в нём должны быть 1, 3 и 7. Любой из 6 вариантов (137, 173, 317, 371, 713, 731) подходит, так как числа 13, 17, 31, 37, 71, 73 — простые.
9. *Ответ:* через 6 лет. *Решение.* Сумма возрастов детей равна 29 годам, что на 12 лет меньше возраста отца. За каждый год эта разница уменьшается на 2, значит, пройдёт 12:2=6 лет.
10. *Ответ:* 1045:11 = 95. *Решение.* Перепишем пример так: ***5 = **ґ11 . Сразу понятно, что число ** оканчивается на 5. Кроме того, оно больше 90, ибо число 90ґ11=990 — трехзначное (а при меньших 90, ещё меньше 990), а наше произведение четырехзначно. Отсюда ясно, что единственное подходящее число — 95.
11. *Ответ:* уменьшится на 4%/ *Решение.* Так как произведение умножается на 1,2 и на 0,8, то оно в общей сложности умножается на 0,96, а следовательно, уменьшается на 4%.
12. *Ответ:* 270°. *Решение.* Если уменьшить один из данных углов на 90°, то их сумма станет равна 180°.
13. *Ответ:* 2112 год.
14. *Ответ:* 200,2 *т*. *Решение.* 200,2×1000000 *г* = 200,2×1000 *кг* = 200,2×1 *т* = 200,2 *т*.

Решения зачетных задач.

1. *Ответ:* 41/42. *Решение.* Упорядочив для удобства числа, рассмотрим все случаи, когда эта сумма дробей меньше 1, а любое уменьшение одного из чисел на 1 сразу даёт сумму, не меньшую 1. Увеличение же любого из чисел сразу даст в этих вариантах ещё меньшую сумму. Для этого начнём перебирать варианты в алфавитном порядке. Сумма дробей будет максимальна в одном из следующих случаев: (2, 3, 7), (2, 4, 5), (3, 3, 4), (3, 4, 4), Нетрудно заметить, что максимальной (41/42) сумма будет в случае (2, 3, 7).
2. *Ответ:* 90°, 30°, 60° или 90°, 22,5°, 67,5°. *Решение.* Возможны два случая: когда прямой угол в 3 раза больше одного из острых и когда острый угол в 3 раза больше другого острого. Разобрав их, получим два ответа.
Иван Иванович купил собаку. Саша думает, что эта собака – черный пудель, Паша считает ее белой болонкой, а Маша – белым бультерьером. Известно, что каждый из ребят верно угадал либо породу, либо цвет шерсти собаки. Назовите породу собаки и цвет ее шерсти.
3. *Ответ:* белый пудель. *Решение.* Все трое назвали разные породы собак. Значит, по крайней мере двое угадали не породу собаки, а цвет шерсти. Очевидно, это Паша и Маша. Стало быть, Саша угадал породу, и собака — белый пудель.
4. *Ответ:* a = 1/42, b = 1/7, c = 1/3, d = 1/2. *Решение.* Из последнего равенства получаем, что $a+b+c = 1–d$. Поэтому $d = 1–d$, откуда d =1/2. Подставляя это значение d во второе и третье уравнения, получаем $a+b = c/2$ и $a+b+c = 1/2$, откуда $3c/2 = 1/2$ и $c = 1/3$. Подставляя найденные значения c и d в первое и второе уравнения, получаем $a = b/6$ и $a+b = 1/6$, откуда b = 1/7 и a = 1/42.
5. *Ответ:* 5, 9, 13, 17 или 21 уголок (засчитывался также ответ без 21 тем, кто решил, что при разрезании должен обязательно получиться хотя бы один прямоугольник 1ґ4). *Решение.* Пусть n — количество уголков, тогда 63–3n должно делиться на 4, чтобы оставшаяся часть разрезалась на прямоугольники 1×4. Таким образом, n может принимать значения 1, 5, 9, 13, 17, 21. Для пяти последних случаев существуют примеры разрезания, а для одного уголка это невозможно. Для доказательства раскрасим клетки доски по диагоналям в 4 цвета. При этом трёх цветов будет по 16 клеток, а одного — 15. Так как каждый прямоугольник 1×4 содержит по одной клетке каждого цвета, то на уголок должно прийтись по одной клетке тех трёх цветов, которых больше. Но можно выбрать такое направление диагональной раскраски, что некоторая одноцветная диагональ будет пересекать уголок по двум клеткам, а следовательно, в нём будут две одноцветные клетки, чего быть не должно. Значит, одного уголка быть не может.
6. *Ответ:* 1152 решения. *Решение.* Сложив оба уравнения, получим 37 = *S*9+*К*+*А* = 45–*Х*+*К*+*А*, где *S*9 – сумма девяти используемых цифр, *Х* — неиспользуемая цифра. Тогда *Х* = 8+*К*+*А* = 9, откуда *К*+*А* = 1. Возможны два случая:
1) *К* = 1, *А* = 0. Тогда *З*+*Н*+*Ь* = 17 = 8+7+2 = 8+6+3=8+5+4 = 7+6+4. Всего 4 варианта, в каждом из которых существует 3! = 6 перестановок цифр на местах *З*, *Н*, *Ь*, и по 4! = 24 перестановки оставшихся цифр на местах *И*, *Р*, *О*, *В*. Таким образом, имеем 4×6×24=576 вариантов.
2) *К* = 0, *А* = 1. Тогда *З*+*Н*+*Ь* = 16 = 8+6+2 = 8+5+3 = 7+6+3 = 7+5+4. Аналогично: всего 4 варианта, в каждом из которых существует 6 перестановок цифр на местах *З*, *Н*, *Ь*, и по 24 перестановки оставшихся цифр на местах *И*, *Р*, *О*, *В*. В результате имеем ещё 576 вариантов.
7. *Ответ:* через 12/13 часа. *Решение.* Пусть они встретятся через t часов, тогда минутная стрелка сдвинется на 360t градусов, а часовая – на 30t градусов, при этом 360t+30t = 360. Следовательно, t = 360/390 = 12/13.
8. *Ответ:* 80. *Решение.* Раскрасим 81 узел сетки в шахматном порядке и заметим, что одного цвета будет 40 узлов, а другого — 41. Следовательно, замкнутая ломаная может содержать не более, чем по 40 узлов каждого цвета, так как узлы в ней чередуются по цвету. Поэтому ломаная содержит не более 80 узлов, а значит, её длина не более 80. Пример ломаной из 80 звеньев легко строится.
9. *Ответ:* 10. *Решение.* Запишем все цифры в ряд в порядке убывания: 9876543210. Очевидно, каждое из искомых чисел получается вычеркиванием одной цифры из полученного ряда. Это можно сделать десятью разными способами, поэтому искомых чисел 10.
10. *Ответ:* b/21001. *Решение.* Заметим, что *М*1*М*2 = b/2, а далее в ряду *М*5*М*6, *М*9*М*10, …, *М*2001*М*2002 каждый отрезок в четыре раза короче предыдущего из этого ряда. Следовательно, *М*2001*М*2002 = (b/2):42000:4 = b/21001.
11. *Ответ:* знак деления. *Решение.* Так как при раскрытии скобок перед всеми дробями будут свои фиксированные знаки, то необходимо выяснить только знак перед двумя последними дробями. Он будет плюсом, так как всего минусов 96:2=48 и они при раскрытии друг друга «уничтожат». Нетрудно убедиться перебором, что из четырёх возможных знаков

самую большую прибавку даст «деление».
12. *Ответ:* от 9 до 16 королей. *Решение.* Разбив доску на 16 квадратов 2×2, убедимся, что в каждом квадрате не более 1 короля, следовательно, королей не более 16. В то же время, королей не менее 9, так как каждое из полей a1, a4, a8, d1, d4, d8, h1, h4, h8 должно быть занято или побито своим королём, иначе можно поставить ещё одного короля. Таким образом, королей не менее 9 и не более 16, причём любой из вариантов возможен, что проверяется непосредственной расстановкой королей.
13. *Ответ:* 48651. *Решение.* Чтобы НОД был больше, числа должны быть пятизначными, но так как они не равны, то меньшее из них будет меньше 50000, и при этом оно будет в два раза меньше большего, иначе оно будет меньше 33333, что нас не устраивает. Начиная составлять эту пару чисел, нетрудно убедиться, что меньшее равно 48651, а большее — 97302.
14. *Ответ:* от 0 до 26 верно решённых задач. *Решение.* На исходном рубеже команда может решить 6 задач изначально, а каждая дополнительно решённая на этом рубеже задача означает, что команда потеряла ещё одну задачу на зачётном (т.е. кто-то из игроков вылетел с зачётного рубежа на исходный). Таким образом, команда может решить не более 6+20=26 задач. Причём каждый из вариантов от 0 до 26 задач возможен, если команда решает меньше задач на зачётном или исходном рубеже.
15. *Ответ:* решений нет. *Решение.* Так как слева два нечётных слагаемых, а одно — чётное, то и вся сумма должна быть чётной, а значит, равняться 235 не может.
16. *Ответ:* 53ґ59ґ71. *Решение.* Пусть n = 53, тогда 51ґ63ґ69+320 = (n–2)(n+10)(n+16)+320 = n3+24n2+108n = n(n+6)(n+18) = 53×59×71, где все множители простые.
17. *Ответ:* 99799899910001001…1006. *Решение.* Надо терпеливо порезать данный ряд на куски до числа 1000 и чуть далее.
18. *Ответ:* 25см = 1/4м. *Решение.* Так как половина роста Чебурашки равна 1/6 роста Гены, то Гена в три раза выше Чебурашки, а значит 1 метр составляет 2 роста Чебурашки. Т.е. его рост равен 0,5 метра, а его половина, равная глубине фонтана — 0, 25 метра.
19. *Ответ:* 11 чисел. *Решение.* Пусть данное трёхзначное число равно $\overline{abc}$. Составим уравнение 100a+10b+c = 19(a+b+c). Упростив, получим 9a = b+2c. Но тогда 9a не больше 27, значит а не больше 3. Случай a = 1 даёт числа 114, 133, 152, 171, 190. Случай a = 2 даёт числа 209, 228, 247, 266, 285. Случай a = 3 даёт число 399.
20. *Ответ:* 25 пассажиров. *Решение.* Пусть первоначально в автобусе ехали 2a взрослых и 3a детей. Тогда всего там было 5a пассажиров. После того, как четверо вышли, в автобусе осталось 3b взрослых и 4b детей - всего 7b. Получаем уравнение 5a = 7b+4, которое надо решить при условии, что 5a < 60. Иными словами, надо найти такое натуральное число b, что число 7b+4 делится на 5 и меньше 60. Из условия 7b+4 < 60 получаем, что b < 8. Перебирая теперь b = 1,2,3,4,5,6,7, находим, что единственным подходящим является b = 3. Поэтому в автобусе первоначально ехало 7ґ3+4 = 25 пассажиров.